

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SUS SISTEMAS EN LA
ESCUELA, PERSPECTIVAS Y DESAFÍOS

THE DEVELOPMENT OF VARIATIONAL THINKING AND ITS SYSTEMS AT SCHOOL,
PERSPECTIVES AND CHALLENGES

VANESSA VILLA POSADA ¹ Y DAVID ALEJANDRO LONDOÑO JIMENEZ ²

RESUMEN: El objetivo del presente artículo es identificar la manera como los referentes nacionales de calidad sugieren el trabajo del álgebra en la escuela y las propuestas que surgen para su desarrollo desde la educación básica y su contraste con las prácticas de aula. Se resalta la importancia del pensamiento variacional en la formación docente, en el ámbito escolar y en las prácticas de aula, pues una de las principales características del pensamiento variacional es su gradualidad, es decir, es un pensamiento que se va desarrollando con el tiempo y requiere ser trabajado de manera constante de tal forma que posibilite la resolución de problemas enfocados en la variación y el cambio, por eso para llevar a cabo este artículo fue necesaria la revisión documental y el análisis de pruebas estandarizadas, lo cual posibilitó entender la significación del pensamiento variacional en todos los procesos formativos. A su vez, se logra concluir que, si bien hay propuestas para potencializar el trabajo del álgebra en la escuela y los referentes nacionales de

¹ Estudiante de pregrado de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Católica de Oriente, Rionegro, email: vanessa.villa8937@uco.net.co

² Magíster en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, docente de cátedra de la Universidad Católica de Oriente, Rionegro, email: david.londono.7129@uco.net.co

calidad proponen un trabajo desde la temprana edad, aun los docentes de básica primaria tienen limitaciones para ejecutar estas propuestas en sus prácticas de aula, por tal motivo los estudiantes cuentan con un acercamiento más directo con este pensamiento solo en la básica secundaria lo que causa que sus desempeños sean menores.

PALABRAS CLAVE: Pensamiento variacional; desarrollo de competencias; educación básica.

ABSTRACT: The objective of this article is to identify the way in which national quality references suggest the work of algebra at school and the proposals that arise for its development from basic education and its contrast with classroom practices. The importance of variational thinking in teacher training, at school environment and in classroom practices is highlighted, since one of the main characteristics of variational thinking is its graduality, that is, it is a thought that develops over time and requires constant work in such a way that it enables the resolution of problems focused on variation and change, therefore, to carry out this article, it was necessary to review documents and analyze standardized tests, which makes it possible to understand the significance of variational thinking in all formative processes. At the same time, it is concluded that, although there are proposals to enhance the work of algebra at school and national quality references propose a work from an early age, even primary school teachers have limitations in

implementing these proposals in their classroom practices, so students have a more direct approach to this thinking only in secondary school, which causes their performance to be lower.

KEYWORDS: Variational thinking; competence development; basic education.

INTRODUCCIÓN

En el presente artículo se presenta una reflexión sobre el desarrollo de competencias básicas propias del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos en estudiantes de la educación básica. Inicialmente, se realiza un análisis de los referentes nacionales de calidad para identificar la estructura del currículo de matemáticas y las orientaciones para su desarrollo; posteriormente se realiza un análisis de los resultados de las pruebas estandarizadas con el fin de determinar el estado de los estudiantes y los docentes en el desarrollo de competencias matemáticas y se consultan diferentes autores frente al abordaje del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos en la educación básica para finalmente realizar una reflexión sobre la literatura encontrada, las prácticas de aula y los resultados obtenidos.

De esta manera, para la enseñanza del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, se toma en consideración inicialmente los referentes de calidad de matemáticas en Colombia, los cuales organizan dicha área en cinco conocimientos básicos: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el cual “se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en

contextos significativos” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.26); el pensamiento espacial y los sistemas geométricos el cual “es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.37); el pensamiento métrico y los sistemas métricos y de medida, el cual toma en consideración logros como la construcción, comprensión, estimación y apreciación de las magnitudes, (Ministerio de Educación Nacional, 1998); el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos donde se integra la realización de modelos de fenómenos físicos y se trabajan estrategias como la simulación de experimentos y de conteos, de tal manera que se potencialice la resolución de problemas, (Ministerio de Educación Nacional, 1998) y finalmente, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos el cual tiene que “ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.21). Teniendo en cuenta estos conocimientos básicos es que se constituye el currículo de matemáticas con el cual se espera que los estudiantes desarrollen competencias, las cuales se “reconocen como un saber hacer en situaciones concretas y contextos específicos” (Cortes, 2016, p.2); siendo así, lo que se pretende es que el estudiante alcance los desempeños propuestos por medio de aprendizajes y evidencias que le den la facultad de emplear lo aprendido de manera

reflexiva en diferentes situaciones. Por eso a nivel nacional el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) realiza unas pruebas por ciclos de escolaridad, en los grados tercero y quinto de primaria, y en el grado noveno de básica secundaria, lo cual tiene como propósito equiparar el progreso de los estudiantes en las competencias matemáticas, dichas pruebas evalúan las competencias de la comunicación, el razonamiento y la resolución a partir de los pensamientos agrupados en tres componentes: aleatorio, espacial – métrico y numérico-variacional.

El componente numérico – variacional en el cual se encuentran las competencias del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos es el que muestra menores desempeños en las pruebas y estos van disminuyendo a medida que los estudiantes avanzan de escolaridad, es decir, es el componente con menor progreso, lo cual se evidencia en la revisión y análisis de los resultados de las pruebas en los grados evaluados, por eso a nivel de Antioquia y Colombia se identifica que el componente numérico – variacional (46,7% Antioquia – 50,1% Colombia) es el componente con menores desempeños seguido del componente espacial – métrico (54,6% Antioquia – 57,7% Colombia) y el aleatorio (57% Antioquia – 60,1% Colombia). Esto pone de manifiesto una mayor dificultad en los estudiantes a la hora de utilizar sus conocimientos en el análisis y solución de situaciones prácticas cuando estas tienen que ver con competencias propias de la variación y el cambio. Tal parece existir una tendencia en los maestros de básica primaria a enfatizar el desarrollo de competencias propias del pensamiento numérico sobre las

competencias del pensamiento variacional; al respecto Kaput (2002) como se cita en Posada, y otros (2006) afirma que:

Si bien los docentes de los primeros grados tienen un papel muy importante para implementar los cambios necesarios en los primeros grados de la educación básica, la mayoría de ellos tiene muy poca experiencia en el trabajo con el álgebra, la cual no va más allá de su propia experiencia como estudiantes, y, por lo tanto, para ellos el álgebra es una colección de técnicas para factorizar, simplificar expresiones, solucionar ecuaciones, y así sucesivamente. Como es muy poco probable que ellos hayan explorado el sentido y significado de las expresiones o de las ecuaciones, entonces, se entiende porque no pueden proponer a sus estudiantes formas diferentes de aproximarse al aprendizaje del álgebra. (p.11).

Se entiende que los docentes de primaria cuentan con limitaciones dentro de su enseñanza para brindar aprendizajes y experiencias con sentido a sus estudiantes frente al pensamiento variacional, por eso sus primeros acercamientos con dicho pensamiento son reducidos y su enfoque es más en lo numérico, sin embargo, hay que considerar, que precisamente los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas tienen como propósito frente al pensamiento variacional:

Construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones

y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.66).

El desarrollo del pensamiento variacional está pensado de una manera progresiva, de tal forma que los estudiantes vayan contando con la facultad de identificar, comprender y abordar de manera correcta los problemas, en donde la capacidad de análisis les va a permitir crear posturas y conjeturas con relación a los conceptos algebraicos que van aprendiendo, siendo así, el objetivo de este artículo es precisamente identificar la manera como los referentes nacionales de calidad sugieren el trabajo del álgebra en la escuela y las propuestas que surgen para su desarrollo desde la educación básica y su contraste con las prácticas de aula.

A su vez, el artículo se encuentra estructurado a partir de los referentes nacionales de calidad y su postura frente al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, la importancia de la educación, la enseñanza y el aprendizaje matemático en el contexto escolar, la formación docente y finalmente las propuestas a nivel nacional e internacional para el abordaje del pensamiento algebraico.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y LOS SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS DESDE LOS REFERENTES NACIONALES DE CALIDAD

En este punto cabe rescatar la importancia de las matemáticas en el desarrollo integral de los estudiantes puesto que se contribuye al fortalecimiento de los aprendizajes para que sean duraderos dado que hace énfasis en los procesos del pensamiento, de tal manera que lleva al estudiante a un pensar más allá del dominio de conceptos y de acuerdo con los Lineamientos Curriculares en matemáticas, los cuales plantean que “el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.18), bajo estas condiciones el quehacer matemático se unifica en tres grandes aspectos para organizar su currículo, los cuales son: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

En primer lugar, los procesos generales “tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.18); los procesos generales permiten al estudiante trabajar su quehacer cognitivo pensando en las mejores maneras de resolver tanto situaciones matemáticas como cotidianas.

En segundo lugar, los conocimientos básicos “tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.19); en este punto hacen parte los cinco pensamientos matemáticos, el numérico, espacial, aleatorio, variacional y métrico, al igual que los sistemas numéricos, geométricos, de medida, sistema de datos, algebraicos y analíticos, de esta forma en todo el transcurrir del proceso formativo, la matemática se hace presente en múltiples formas y permite a los estudiantes encontrar la importancia de las mismas en su proceso formativo y en su contexto, gracias a que los cinco pensamientos se encuentran presentes en todos los grados de la escolaridad.

Finalmente, el contexto “tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.19), es decir, al momento de pensar en una situación matemática se debe tomar en consideración las variables sociales y culturales de la institución educativa o de los estudiantes, para que en el desarrollo de la misma, su aplicabilidad no solo se quede en el contexto matemático sino también se relacione con su entorno, además no hay que considerar la matemática como un área a parte sino que esta se puede transversalizar con las otras áreas y con las otras ciencias.

Las dimensiones estructurantes de la matemática dan pie para que el currículo matemático se organice de una manera clara y coherente, donde se toma en cuenta el desarrollo de los procesos del pensamiento al igual que el sentido y utilidad de la matemática en todos los contextos.

Dicho esto, el pensamiento variacional se va desarrollando gradualmente, puesto que no hace parte de un grado específico, sino que se trabaja en todos los grados de la escolaridad, esto tomando en consideración los lineamientos curriculares de matemáticas los cuales plantean que:

En el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.50)

Asimismo, el pensamiento variacional guarda estrecha relación con los demás pensamientos matemáticos dado que en la resolución de problemas se ven involucrados sino todos, la mayoría de los procesos matemáticos, destacando de esta forma que “el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.68).

Para potencializar el desarrollo de competencias en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos; desde la educación básica primaria se pueden realizar actividades sobre secuencias y patrones, de tal manera que el estudiante logre identificar qué es lo que varía y lo que permanece constante, y así logre proponer diversas soluciones o generalizaciones para los

problemas, además, otras actividades a tener en cuenta son por ejemplo el crecimiento de una planta, el flujo de vehículos en un centro comercial, entre otros, este tipo de actividades permite al estudiante de primaria tener nociones propias de la variación y el cambio; dado que con el estudio del álgebra escolar desde la temprana edad se construyen algunos elementos propios del álgebra tales como: el concepto de variable, la relación de igualdad en sus múltiples significados, el concepto de parámetro, de incógnita y de ecuación e inecuación, entre otros (Posada, y otros, 2006).

Por eso, el pensamiento variacional cuando se trabaja en todos los grados va a permitir que los estudiantes cuenten con la capacidad de enfrentarse a situaciones problema que ponen a prueba su facultad de análisis, comprensión y argumentación puesto que serán capaces de organizar sus representaciones mentales para dar solución al planteamiento inicial, identificado que es lo que el problema requiere y las posibles soluciones que este tiene.

IMPORTANCIA DE LA EDUCACIÓN, LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

MATEMÁTICO EN EL CONTEXTO ESCOLAR

La educación matemática no pretende robotizar ni mecanizar el pensamiento de la sociedad por medio de sus múltiples teorías, contenidos, ecuaciones y fórmulas, así, de acuerdo con Godino, Batanero y Font (2003) el objetivo principal no es convertir a las futuras generaciones de ciudadanos en fans de las matemáticas, tampoco se trata de prepararlos para que resuelvan cálculos complejos, puesto que la tecnología de hoy ayuda en ese problema. Lo que se pretende es

proporcionar una cultura con varios componentes que se conectan: Capacidad para entender y valorar de manera crítica la información matemática y los argumentos que las personas pueden descubrir en diversos ambientes, incluyendo los medios de comunicación, o en su trabajo profesional, capacidad para debatir o transmitir información matemática, cuando sea de importancia y habilidad para resolver los problemas matemáticos que encuentre en la vida diaria o en el trabajo profesional. Por tanto, la educación matemática se convierte en un constructo social que permite la apropiación y comprensión de la información, el análisis crítico, la generación de debates y la organización de ideas, que fortalecen el entendimiento de las matemáticas no solo en su naturaleza formal y abstracta sino enfocada a las necesidades de la vida diaria.

Por otra parte, la enseñanza de las matemáticas debe ser eficaz, puesto que el docente debe conseguir un desarrollo integral que perdure en cada uno de sus estudiantes teniendo en cuenta el rendimiento de los mismos, su interacción social, su situación económica y cultural de la mano de sus familias (Martínez & Murillo, 2016). Esto con el fin de mejorar el desarrollo socio – afectivo de sus estudiantes, siendo equitativo con cada uno, llevando a que sus aprendizajes perduren en el tiempo y preocupándose por su bienestar, de esta forma se constituye la enseñanza como un proceso que guía a los estudiantes por medio de sus docentes a que se conviertan en agentes del cambio.

Según Godino, Batanero y Font (2003) “el fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos

para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar” (p.69). Enseñar matemáticas se convierte entonces en una estrategia para que los estudiantes se enfrenten a situaciones propias que sean capaces de resolver, porque nada mejor que llevar los conceptos a la práctica, es ahí donde se ve reflejado el verdadero aprendizaje; la enseñanza de las matemáticas debe permitir que los estudiantes actúen con independencia, se generen sus propias preguntas y a través de lo enseñado llegar a conclusiones. “Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprensión de lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender, y por tanto les desafían y apoyan para aprenderlas bien” (Godino, Batanero, & Font, 2003, p.13). El docente de matemáticas identifica en que fallan sus estudiantes, los ayuda a superar dichas dificultades y trabaja en el fortalecimiento de sus potencialidades.

Además, los estudiantes en su proceso formativo deben contar con la capacidad de interpretación y entendimiento de las matemáticas para poder generar un aprendizaje que perdure en el tiempo y no solo sea para el momento de la evaluación, donde el estudiante sea el encargado de investigar, auto-cuestionarse y ser crítico frente a los diferentes temas matemáticos que se encuentra aprendiendo, al respecto Godino, Batanero y Font (2003) plantean que “los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo” (p.13).

Las matemáticas se constituyen como un área fundamental puesto que se hace presente de muchas formas en nuestra vida y cuando se trabaja de manera correcta y se desarrollan las competencias esperadas en los estudiantes, el acto matemático en el aula, se va a convertir en un ambiente transformador de conocimientos con aprendizajes significativos, en donde se pone de manifiesto la importancia de los buenos procesos formativos y el papel integrador del docente de matemáticas en el transcurrir de la escolaridad.

LA FORMACIÓN DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS Y SU IMPLICACIÓN CON EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

La formación docente es un elemento primordial en el desarrollo del conocimiento escolar, puesto que es el docente el encargado de hacer del acto educativo un ambiente de aprendizaje colectivo, por eso, el docente no solo cuenta con un conocimiento específico o disciplinar, sino que además toma en consideración la didáctica y el contexto en el que se encuentra, con relación a esto Shulman (1986) propone los conocimientos básicos con los que un docente debe contar, los cuales agrupo en tres categorías: “el conocimiento del contenido de la materia específica, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento curricular” (como se citó en Pinto & González, 2008, p.85). Se considera el conocimiento específico de la materia como el nivel mínimo de dominio que el profesor posee sobre su área para poder enseñarla; el conocimiento didáctico se define como las formas y estrategias que emplea el docente para que su materia sea comprensible para los demás;

y el conocimiento curricular es la manera como el docente incluye en sus procesos de enseñanza las percepciones, concepciones y errores de sus estudiantes para fortalecer su enseñabilidad y potencializar el aprendizaje (Shulman, 1986, como se citó en Pinto & González, 2008). Siendo así, es importante que el docente tenga en cuenta todos los entes que hacen parte de su proceso de formación, para que le brinde a sus estudiantes las mejores herramientas y oportunidades de aprendizaje. De acuerdo a lo anterior y de acuerdo con Fonseca y Castillo (2013) el docente de matemáticas:

Debe desarrollar, conocimientos que le permitan entender el orden lógico de los contenidos matemáticos según la percepción de los matemáticos puros y acorde con los libros de texto y planes de estudios; así como entender la percepción de los estudiantes de dichos contenidos, en concordancia con sus edades y desarrollo mental. También requiere de conocimientos que le permitan ubicar la utilidad de los contenidos fuera y dentro del contexto escolar, conectar estos con otros temas y disciplinas, y conocer su evolución en el tiempo. En otras palabras, los conocimientos y experiencias deben incluir elementos explícitos y tácitos del contenido mismo, así como de pedagogía, sicología e historia (p.5).

Por su parte, en cuanto al pensamiento variacional el docente de matemáticas debe contar con las herramientas conceptuales y prácticas para abordar y enseñar significativamente todo lo que dicho pensamiento implica, al respecto Godino y Font, (2003) señalan que “los maestros en

formación tienen que construir la visión del papel central de las ideas algebraicas en la actividad matemática, y sobre cómo desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles” (p.774); dado que, cuando el docente de matemáticas trabaja desde la educación básica los conceptos algebraicos le está permitiendo al estudiante desarrollar la facultad de entender nociones básicas de variación las cuales se irán reafirmando y potencializando en el transcurrir de la escolaridad y así el docente de matemáticas se convierte en un ente activo y su rol como formador de estudiantes se hace presente en todo momento.

Ahora bien, los resultados de las pruebas TEDS-M (Teachers Education Study in Mathematics), las cuales son “el primer estudio internacional comparativo sobre el conocimiento adquirido por los futuros profesores de matemáticas en educación primaria y educación secundaria obligatoria al acabar su formación inicial” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012, p.9); y que tienen por objetivo evaluar a los docentes en formación de matemáticas en diferentes dominios, tanto en el saber específico como en el conocimiento didáctico de la matemática permiten ver que en cuanto al álgebra se toman en consideración los patrones, las expresiones algebraicas, las ecuaciones, fórmulas y funciones, el cálculo y análisis, el álgebra lineal y álgebra abstracta. Según los resultados de estas pruebas los docentes de matemáticas en cuanto al pensamiento variacional son capaces de: Responder a preguntas que requieren cálculos básicos con números naturales; identificar propiedades de las operaciones con números naturales; razonar acerca de números pares e impares; resolver problemas sencillos que incluyan fracciones simples;

entender el uso de variables sencillas y la equivalencia de expresiones algebraicas; resolver problemas con ecuaciones sencillas; emplear fracciones para resolver problemas con enunciado verbal; utilizar expresiones y funciones lineales y resolver problemas de razonamiento proporcional, en contraste se encontró que los docentes tienen conocimiento limitado de proporcionalidad, razonamiento multiplicativo y mínimo común múltiplo; tienen dificultades para realizar razonamientos que incluyan varias afirmaciones o relaciones entre conceptos matemáticos, como, por ejemplo, identificar la representación algebraica de tres números pares consecutivos; tienen dificultades para encontrar las aplicaciones de funciones cuadráticas y exponenciales y encuentran difícil aplicar el álgebra a situaciones geométricas, (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012); lo cual hace un llamado a los docentes de matemáticas, que si bien cuentan con habilidades propias del saber, saber ser y saber hacer de su profesión, aún hace falta seguir fortaleciendo las competencias propias del pensamiento variacional de tal manera que su labor siga enriqueciendo los procesos formativos de los estudiantes.

¿CÓMO ABORDAR EL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN EL AULA DESDE LA BÁSICA PRIMARIA?

A nivel de Colombia, para el desarrollo de las competencias del pensamiento variacional se propone el trabajo de la aritmética generalizada, el paso de enunciados verbales a ecuaciones y la modelación matemática. La generalización es parte activa de todos los procesos matemáticos, ya

que la generalización es el proceso fundamental para construir los conceptos matemáticos, así como las relaciones entre ellos, sea con axiomas o teoremas (Posada, Obando, & Múnera, 2006), por eso, el pensamiento variacional como aritmética generalizada “implica la construcción de los conceptos propios de la aritmética como resultado de procesos de generalización” (Posada, Obando, & Múnera, 2006, p.31), esto es, que por medio de la aritmética se logra el trabajo variacional cuando el estudiante logra identificar en su quehacer con los números un modelo de solución general que le permite identificar las relaciones entre las operaciones numericas y la importancia del signo igual no como un resultado sino como una equivalencia, para que así con el trabajo numérico se vaya contruyendo el sentido y significado del algebra escolar, que va más alla de las ecuaciones y el uso de variables, por eso, en la enseñanza de un concepto matemático se tiene que buscar diferentes estrategias para el trato de dicho concepto, ya que “no es suficiente tratar con una sola situación, sino que por el contrario, es necesario el tratamiento de una gran variedad de situaciones” (Posada, Obando, & Múnera, 2006, p.32), de tal manera que el estudiante adquiera un aprendizaje que perdure en el tiempo y así encuentre la relevancia de lo que se le está enseñando. De esta forma, cuando se les enseñe a los estudiantes desde la básica primaria la relación de la aritmética con el álgebra, lo que se esta provocando es que los estudiantes vayan fortaleciendo su capacidad de análisis y comprensión de los problemas matemáticos.

Por su parte, cuando los estudiantes de la básica secundaria se enfrentan al paso de los enunciados verbales a ecuaciones, este proceso requiere haber sido trabajado con anterioridad, ya

que desde la primaria se trabajan estas nociones cuando se realizan las diferentes representaciones a un problema, si bien no se expresa el problema en una ecuación, si se realiza una conversión de la situación, generalmente presentada en lenguaje natural a representaciones de tipo algebraico, lo cual es fundamental en el razonamiento algebraico (Obando, 2006); un estudiante de primaria puede representar de manera gráfica icónica, gráfica no icónica o simbólica, la situación problema que se le presenta y es dicha representación la construcción propia del estudiante donde refleja su capacidad de comprensión y la manera como manifiesta las relaciones matemáticas, así como lo enuncia Obando, (2006):

Las representaciones para una misma situación tienen algo en común: expresan la forma como se relacionan, matemáticamente hablando, las tres cantidades involucradas en la misma: una cantidad inicial, una cantidad final y un operador que expresa lo que le sucede a la cantidad inicial. Cada una de ellas ayuda a comprender algo nuevo de la situación, y en su conjunto, permiten la comprensión de cómo se relacionan las cantidades conocidas y desconocidas (p.56).

Otro de los aspectos, es la modelación matemática la cual no se presenta de manera innata ni inmediatamente, por el contrario, su desarrollo requiere tiempo puesto que el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el entendimiento del contexto y de la situación y sus facultades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las cantidades, de

tal forma que se pueda construir un nuevo objeto matemático, dado que la modelación es un proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un problema o fenómeno del mundo real (Villa y otros, 2008); la modelación matemática permite al estudiante resolver problemas con una postura crítica ya que sabrá interpretar y leer los planteamientos para proponer las posibles soluciones.

Dentro de las nuevas propuestas que están tomando fuerza para el trabajo del pensamiento algebraico a nivel internacional se encuentran el Early Álgebra y en otros casos el Pre-Álgebra, esto con la finalidad de abordar desde la primaria nociones importantes sobre este pensamiento y así potencializar los saberes en los estudiantes a medida que avanzan de grado, dicho esto, varias investigaciones han demostrado la importancia de crear bases sólidas en la primaria y no solo dejar el álgebra para los grados superiores, por eso, en primera instancia aparece el Pre – Álgebra donde se rescata la importancia de actividades pre - algebraicas como “el planteamiento y la resolución de ecuaciones, aproximaciones a la generalización, patrones numéricos y geométricos, variables y funciones” (Socas, 2011, p.9); con el Pre – Álgebra se pretende que los estudiantes cuenten con más herramientas para la resolución de problemas y se fomente la creatividad y la buena comprensión de las matemáticas, por eso, esta propuesta esta pensada para los últimos grados de la básica primaria, así como lo hace saber los Estandares de la National Council of Teachers of Mathematics (1989) los cuales proponen que el trabajo introductorio del álgebra es una generalización de la aritmética; en donde se tiene una concepción más amplia del álgebra, en el sentido que se enfatiza en actividades que promuevan el desarrollo de interpretaciones

procedimentales y se refleje de manera explícita la transición de los procesos a las estructuras algebraicas; de esta forma el Pre – Álgebra va a permitir que los estudiantes de primaria adquieran saberes con significado que se van entrelazando con lo que aprenden en los grados superiores. Por otra parte, el Early Álgebra es una “propuesta de cambio curricular que propone introducir el álgebra desde la educación primaria integrada en los otros bloques de contenido matemático de esta etapa” (Socas, 2011, p.10), en donde en el aula se van a trabajar actividades como los patrones y secuencias para tener nociones propias del álgebra, por eso, así como lo plantean Blanton y Kaput (2005) los estudiantes van a explorar, modelar situaciones, hacer predicciones, argumentar, discutir, generar ideas y practicar sus habilidades de cálculo para generar ambientes de trabajo en matemáticas; con el Early Álgebra se pretende que los estudiantes trabajen desde sus primeros grados de escolaridad el álgebra de manera activa y a su vez de la mano del pensamiento numérico para ir construyendo un aprendizaje con comprensión y sentido que facilite el estudio formal del álgebra.

CONCLUSIONES

El pensamiento variacional debe ser abordado a partir de los primeros grados de escolaridad puesto que los mismos referentes nacionales de calidad de Colombia proponen el desarrollo de competencias desde temprana edad, con actividades que involucren a los estudiantes con nociones de variación y cambio, las cuales se van fortaleciendo cuando lleguen a la educación básica

secundaria y la educación media, y de esa forma el estudiante logre encontrar la importancia y utilidad de lo que aprendieron con anterioridad, sin embargo, se evidencia desconocimiento por parte de los docentes para abordar dicho pensamiento desde la primaria, dado que su formación o sus prácticas en el aula se ven limitadas puesto que su interacción con el pensamiento algebraico solo toma en cuenta las ecuaciones o polinomios los cuales se trabajan en la secundaria, por eso, es importante que el docente de matemáticas se mantenga a la vanguardia de las prácticas de aula e investigue sobre las nuevas propuestas que se están implementando como el Early Álgebra o el Pre-álgebra, y conozca las estrategias que ya están en Colombia como el trabajo de la aritmética generalizada o la modelación matemática, para que cuando se encuentren con sus estudiantes se posicionen de su saber y realicen trabajos y actividades de aula enriquecedoras.

El abordaje de los conocimientos (pensamientos matemáticos) en el aula de clase no son un proceso exhaustivo ni excluyente, pero por diversas razones como la saturación de contenidos, la falta de formación de los docentes o el desconocimiento de herramientas del medio, el desarrollo de las competencias matemáticas corre el peligro de reducirse al aprendizaje de procesos rutinarios, la aplicación de procedimientos algorítmicos o la solución de situaciones en las cuales se minimiza el razonamiento, el pensamiento creativo, la búsqueda de soluciones y el enriquecimiento de los procesos de abstracción y de generalización propios del pensamiento variacional. Se hace necesario que la labor docente se organice de manera tal que permita a los estudiantes superar de forma consciente sus dificultades, propiciar una atmósfera que los lleve a enfrentar nuevos desafíos con

perseverancia, favorecer actitudes como escuchar, analizar y argumentar que les permitan modelar situaciones y de esta forma abrir la puerta al desarrollo de competencias del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 412-446.

Cortes, D. (26 de Abril de 2016). *Matriz de referencia matemáticas*. Obtenido de ICFES, Siempre el día E: https://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf

Fonseca, J., & Castillo, M. (2013). Formación de docentes de matemática: Aspectos relevantes . *UNICIENCIA*, 1-14.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Godino, J., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. En J. Godino, & V. Font, *Matemáticas y su didáctica para maestros* (págs. 766-826). Granada: Universidad de Granada.

Martinez, C., & Murillo, J. (2016). Investigación Iberoamericana Sobre Enseñanza Eficaz. *Revista mexicana de investigación educativa - RMIE*, 471-499.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (Junio de 2016). *Saber 3°, 5° y 9° 2015 Cuadernillo de Prueba, Primera Edición, Matemáticas grado 3°*. Obtenido de ICFES Resultados históricos: <https://www.icfes.gov.co/documents/20143/489116/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%203%20matematicas%202015%20v3.pdf>

Ministerio de Educación Nacional. (Junio de 2016). *Saber 3°, 5° y 9° 2015, Cuadernillo de prueba, Primera edición, matemáticas grado 5°*. Obtenido de ICFES Resultados históricos: <https://www.icfes.gov.co/documents/20143/489407/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%205%20matematicas%202015%20v3.pdf>

Ministerio de Educación Nacional. (Junio de 2016). *Saber 3°, 5° y 9° 2015, Cuadernillo prueba, Primera edición, Matemáticas grado 9°*. Obtenido de ICFES Resultados históricos : <https://www.icfes.gov.co/documents/20143/489878/Ejemplos%20de%20preguntas%20saber%209%20matematicas%202015%20v3.pdf>

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Madrid: Secretaría general técnica.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. *NCTM. Reston, VA*.

Obando, G. (2006). El paso de enunciados verbales a ecuaciones. En F. Posada, O. Gallo, J. Gutiérrez, C. Jaramillo, O. Monsalve, J. Múnera, . . . M. Vanegas, *Módulo 2. Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (págs. 55-75). Medellín: Editorial artes y letras Ltda.

- Pinto, J., & González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación matemática*, 83-100.
- Posada, F., Gallo, O., Gutiérrez, J., Jaramillo, C., Monsalve, O., Múnera, J., . . . Vanegas, M. (2006). *Módulo 2. Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. Medellín: Artes y letras Ltda.
- Posada, F., Obando, G., & Múnera, J. (2006). El razonamiento algebraico como aritmética generalizada. En F. Posada, O. Gallo, J. Gutiérrez, C. Jaramillo, O. Monsalve, J. Múnera, . . . M. Vanegas, *Módulo 2. Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (págs. 31-53). Medellín: Editorial artes y letras Ltda.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5 - 34.
- Villa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos. *ASOCOLME: Asociación colombiana de matemática educativa*, 1-5.